

Pozycyjne systemy liczbowe

System liczbowy to ogół zasad dotyczących zapisu i nazewnictwa liczb. Jeśli zapis i nazwy zależą od pozycji, na której zapisana jest cyfra danej liczby, to system nazywany jest pozycyjnym.

Na codzień posługujemy się systemem dziesiętnym, liczba składa się z jednościami, dziesiątek, setek, tysięcy, itd., oraz części dziesiątych, setnych, tysięcznych, itd. Oprócz systemu dziesiętnego istnieją także inne pozycyjne systemy liczbowe - system binarny, system szesnastkowy, dwunastkowy, trójkowy, itd. Wiele z nich znajduje zastosowanie głównie w informatyce, w zapisie danych i przetwarzaniu informacji (wykonywanie operacji na innych systemach liczbowych często wymaga mniej zasobów pamięci komputera).

W systemie dziesiętnym używanych jest 10 cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

System dwójkowy (binarny) posługuje się jedynie dwoma: 0, 1.

System trójkowy trzema: 0, 1, 2.

Itd.

Dla systemów wykorzystujących więcej niż 10 cyfr, np. systemu szesnastkowego czy dwunastkowego, w miejsce kolejnych cyfr wstawiane są kolejne litery alfabetu, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, itd., Dla przykładu zapis 12A oznacza liczbę w systemie szesnastkowym.

W ogólności, zapis liczby w systemie o podstawie b przybiera następującą postać:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \cdot c_1 c_2 c_3 \dots)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + c_3 b^{-3} + \dots$$

gdzie a_1 oznacza cyfrę jedności, a_2 cyfrę dziesiątek, itd., natomiast c_1 część dziesiętną, c_2 część setną, itd.

Przykład:

$123_{10} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ - liczba 123 w dziesiętnym systemie liczbowym, rozpisana wg powyższej reguły.

$1001_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9_{10}$ - liczba 9 zapisana w systemie dwójkowym ma postać 1001.

$12A_{16} = 1 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + A \times 16^0 = 256 + 32 + 10 = 298_{10}$ - liczba 298 zapisana w systemie szesnastkowym ma postać 12A.

Zadanie:

Zapisać podane liczby w systemie dziesiętnym:

a) 101001_2 ,

b) 1210121_3 ,

c) 5555_8 ,

d) $4A1B_{16}$.

Odpowiedzi:

a) 41,

b) 1312,

c) 2925,

d) 18971.

System dwójkowy (binarny)

System dwójkowy (nazywany inaczej binarnym) jest najpowszechniej wykorzystywanym pozycyjnym systemem zapisu liczb. Używany jest głównie w informatyce, stanowi bowiem język, jakim posługują się komputery. Każdy program komputerowy - niezależnie od tego w jakim języku programowania napisany - ostatecznie zostaje tak czy inaczej "przetłumaczony" na ciąg zer i jedynek, a zatem zapis w systemie binarnym.

Liczba zapisana w systemie dwójkowym to ciąg zer i jedynek - w jaki sposób możemy dowiedzieć się jaka jest jej wartość w systemie, którego używamy na codzień, tj. w systemie dziesiętnym? Np. jaka jest wartość liczby 11001_2 ? (Dwójka w indeksie dolnym oznacza zapis binarny)

Przykład:

$$11001_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Kolejne cyfry w zapisie 11001_2 mnożymy przez podstawę systemu (a zatem w tym wypadku 2) podniesioną do odpowiedniej potęgi. Potęgi te wyznaczamy patrząc od końca - ostatnia jest zerem, a następne kolejnymi liczbami naturalnymi. Liczba 11001_2 składa się z pięciu znaków (tj. zer lub jedynek) a zatem najwyższą potęgą dwójki będzie 4 (liczymy od zera, dlatego 4 a nie 5).

$$11001_2 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 16 + 8 + 1 = 25_{10}$$

A zatem liczba 11001_2 w systemie dwójkowym to 25_{10} w systemie dziesiętnym.

Jak z kolei przejść z zapisu dziesiętnego na zapis dwójkowy? W tym celu musimy wykonać odpowiednie podzielenie oraz zliczać pojawiające się po drodze reszty z tego dzielenia. Dzielić będziemy przez 2 (bo taka jest podstawa systemu). Reszty zapisujemy - w oparciu o nie będziemy mogli zapisać daną liczbę w systemie binarnym.

W przypadku liczby 25_{10} podzielonej przez 2 dostaniemy wynik 12 oraz resztę 1. Następnie dzielimy 12 otrzymując 6 oraz resztę 0. Podzielenie 6 również daje nam resztę 0 oraz wynik 3 - który z kolei po

podzieleniu przez 2 zwróci wynik 1 oraz resztę również 1. Tej ostatniej jedynki już na dwa nie podzielimy - zostaje nam zatem ostatnia reszta - 1. Teraz odczytując zapisane reszty "od dołu" otrzymujemy zapis liczby 25_{10} w systemie dwójkowym: 11001_2 .

Zadanie

Zamienić podane liczby w systemie dziesiętnym na system dwójkowy

- a) 12
- b) 45
- c) 98
- d) 126
- e) 255
- f) 516

Odpowiedź

- a) 1100
- b) 101101
- c) 1100010
- d) 1111110
- e) 11111111
- f) 1000000100

System szesnastkowy (heksadecymalny)

System szesnastkowy jest drugim obok binarnego (dwójkowego) pozycyjnym systemem liczbowym wykorzystywanym w informatyce. W tym systemie podstawą jest liczba 16, w związku z czym oprócz cyfr 0-9 używa się także znaków liter. Kolejnym literom alfabetu odpowiadają kolejne liczby.

A = 10

B = 11

C = 12

D = 13

E = 14

F = 15

Liczbę zapisaną w systemie szesnastkowym oznacza się dolnym indeksem 16.

Zamiana liczby zapisanej w systemie szesnastkowym na liczbę w systemie dziesiętnym odbywa się poprzez pomnożenie kolejnych znaków występujących w zapisie przez podstawę systemu (16) podniesioną do odpowiednich potęg (tj. od 0 do $n-1$, gdzie n to liczba znaków, z których składa się liczba w systemie szesnastkowym; potęgi wpisujemy "od końca", tzn. ostatnia szesnastka dostaje zero, itd., aż do pierwszej szesnastki, którą podnosimy do potęgi $n-1$). Następnie znaki zamieniamy na liczby (jeśli pojawiły się wśród nich litery) a całość sumujemy.

Przykład:

$$\begin{aligned}2A3E_{16} &= 2 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 = 2 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 3 \cdot 16 + 14 \cdot 1 \\ &= 8192 + 2560 + 48 + 14 = 10814_{10}\end{aligned}$$

Z kolei przejście w drugą stronę odbywa się poprzez wykonanie dzielenia liczby w systemie dziesiętnym przez 16 oraz zliczania występujących podczas tej procedury reszt z dzielenia.

10814_{10} podzielone przez 16 to 675 oraz 14 reszty. 675 przy dzieleniu przez 16 da w wyniku 42 oraz reszty 3 . Następnie dzielimy 42 otrzymując 10 reszty oraz wynik 2 - tego wyniku już nie podzielimy przez 16 w związku z czym 2 jest ostatnią resztą. Teraz zastępujemy liczby większe od 9 odpowiednimi symbolami ($14=E$ oraz $10=A$) oraz odczytujemy reszty (patrzac od końca). Nasza liczba to $2A3E_{16}$.

Zadanie

Zamienić podane liczby w systemie dziesiętnym na system szesnastkowy

- a) 12
- b) 45
- c) 98
- d) 126
- e) 255
- f) 516

Odpowiedź

- a) C
- b) 2D
- c) 62
- d) 7E
- e) FF
- f) 204