2.3. Wyznaczanie wartości wielomianu, pozycyjne systemy liczbowe i reprezentacja danych liczbowych w komputerze

2.3.1. Systemy liczbowe

Definicja

Systemem liczbowym nazywamy zbiór zasad określających sposób zapisywania i nazywania liczb.

Definicja

Pozycyjny system liczbowy to system, w którym wartość cyfry zależy od miejsca, w jakim znajduje się ona w danej liczbie. Miejsce to nazywamy pozycją.

Do najważniejszych pozycyjnych systemów liczbowych wykorzystywanych w informatyce należą:

- system dwójkowy, czyli binarny;
- system ósemkowy, czyli oktalny;
- system szesnastkowy, czyli heksadecymalny.

Podstawą **systemu binarnego**, określającą liczbę cyfr, jest dwa. System ten korzysta więc z dwóch cyfr, którymi są 0 i 1.

System oktalny ma podstawę osiem, stąd cyframi są tutaj 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Podstawą **systemu heksadecymalnego** jest szesnaście, a więc w systemie tym korzystamy z szesnastu cyfr. Cyframi tego systemu są: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Wykorzystanie liter w zapisie cyfr podyktowane jest koniecznością jednoznacznej notacji liczby w tym systemie. Litery odpowiadają cyfrom, których wartości zapisane w układzie dziesiętnym są liczbami dwucyfrowymi:

$$A_{16} = 10_{10},$$

$$B_{16} = 11_{10},$$

$$C_{16} = 12_{10},$$

$$D_{16} = 13_{10},$$

$$E_{16} = 14_{10},$$

$$F_{16} = 15_{10}.$$

Gdybyśmy nie korzystali z liter, zapis liczby 112_{16} mógłby oznaczać 112_{16} lub $B2_{16}$ lub $1C_{16}$.

Wskazówka

Przy realizacji konwersji i działań arytmetycznych w różnych systemach liczbowych można zastosować udostępnioną w systemie Windows aplikację **Kalkulator**. Program ten umożliwia realizację obliczeń w następujących systemach: decymalnym (czyli dziesiętnym), binarnym, oktalnym i heksadecymalnym. Wykonywać można zarówno konwersję pomiędzy wymienionymi systemami, jak i operacje arytmetyczne. Aby uzyskać dostęp do tych systemów, należy po uruchomieniu aplikacji Kalkulator wybrać w menu polecenie *Widok/Programisty* (we wcześniejszych wersjach systemu Windows — *Widok/Naukowy*).

Najbardziej znanym systemem liczbowym, który nie jest pozycyjny, jest **system rzymski**. Zaliczany jest on do systemów zwanych **addytywnymi**. Charakteryzują się one tym, że bazują na symbolach dla kilku małych liczb oraz ich wielokrotności. W przypadku systemu rzymskiego dotyczy to wielokrotności liczb 5 i 10. Dostępnych jest razem siedem znaków:

$I = 1$,

$V = 5$,

$X = 10$,

$L = 50$,

$C = 100$,

$D = 500$,

$M = 1000$.

Zapisywanie liczby w tym systemie polega na składaniu jej przez dodawanie lub odejmowanie kolejnych symboli o określonej wartości. Liczba reprezentująca dany symbol odejmowana jest wówczas, gdy następny symbol ma większą od niej wartość. W przeciwnym wypadku wykonywane jest dodawanie.

Na przykład wartość liczby *MCCXCIX* wyznacza się następująco:

$MCCXCIX = 1000_{10}+100_{10}+100_{10}-10_{10}+100_{10}-1_{10}+10_{10} = 1299_{10}$.

Zadanie 2.9. Zamień liczby podane w systemie rzymskim na system dziesiętny:

a) *MXLVIII*,

b) *MCMLXXXIV*,

c) *CMXLVII*,

d) *DXLIX*,

e) *MMMCDI*.

Zadanie 2.10. Zamień liczby podane w systemie dziesiętnym na system rzymski:

a) 1999_{10},

b) 184_{10},

c) 2876_{10},

d) 3012_{10},

e) 488_{10}.

Zadanie 2.11. Podaj specyfikację zadania i skonstruuj algorytm w postaci schematu blokowego i programu realizujący konwersję liczb z systemu rzymskiego na dziesiętny.

Zadanie 2.12. Podaj specyfikację zadania i skonstruuj algorytm w postaci programu realizujący konwersję liczb z systemu dziesiętnego na rzymski.

2.3.2. Konwersje pozycyjnych systemów liczbowych

Konwersja systemu dziesiętnego na inny pozycyjny system liczbowy

Wskazówka

Aby **zamienić liczbę nieujemną zapisaną w systemie decymalnym na wartość w systemie binarnym**, należy powtarzać dzielenie z resztą tej liczby przez podstawę systemu dwójkowego, dopóki w wyniku takiego dzielenia nie uzyskamy 0. Wówczas otrzymane reszty z dzielenia, w kolejności od ostatniej obliczonej reszty do pierwszej, stanowią rozwiązanie.

Przykład 2.5.

Przeanalizujmy konwersję systemu dziesiętnego na dwójkowy na przykładzie liczbowym. Zapiszmy liczbę 125_{10} w systemie binarnym:

125	:	2	=	62	reszta 1
62	:	2	=	31	reszta 0
31	:	2	=	15	reszta 1
15	:	2	=	7	reszta 1
7	:	2	=	3	reszta 1
3	:	2	=	1	reszta 1
1	:	2	=	0	reszta 1

W wyniku dzielenia uzyskaliśmy zero, więc obliczenia zostały zakończone. Rozwiązanie odczytujemy, rozpoczynając od reszty uzyskanej na końcu, stąd $125_{10} = 1111101_2$.

Wygodniejszy jest następujący zapis konwersji tych liczb:

125	1
62	0
31	1
15	1
7	1
3	1
1	1
0	

Opracujmy **algorytm wykonujący zamianę liczb zapisanych w systemie decymalnym na liczby binarne** w postaci schematu blokowego (patrz rysunek 2.5) oraz programów w językach C++ (patrz punkt 3.6.1, „Tablice") i Pascal. Dodatkowo na płycie CD znajduje się realizacja tego algorytmu wykonana za pomocą arkusza kalkulacyjnego (*arkusz2_4.xls*, *arkusz2_ 4.ods*).

Specyfikacja:

Dane: Liczba całkowita: *liczba* ≥ 0 (liczba w systemie dziesiętnym).

Wynik: Liczba całkowita: $i > 0$ (liczba cyfr wartości otrzymanej po zamianie z systemu dziesiętnego na dwójkowy).

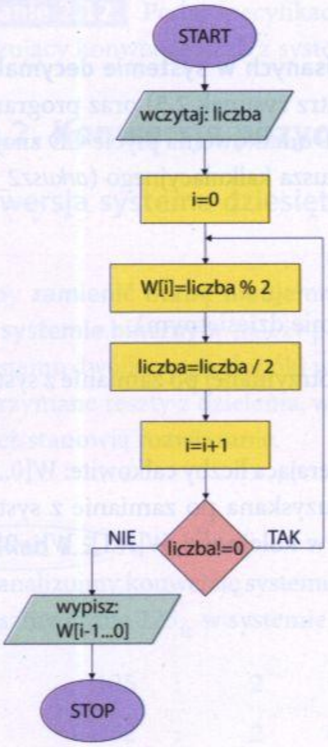
i-elementowa tablica jednowymiarowa zawierająca liczby całkowite: $W[0...i-1]$ (liczba zapisana w systemie dwójkowym uzyskana po zamianie z systemu dziesiętnego, której cyfry należy odczytać w kolejności $W[i-1]$, $W[i-2]$, ..., $W[0]$).

***Funkcja w języku C++** (prog2_8.cpp):*

```
void oblicz (long liczba, int &i, int W[])
{
 i=0;
 do
 {
  W[i]=liczba%2;
  liczba=liczba/2;
  i++;
 }
 while (liczba!=0);
}
```

Procedura w języku Pascal (prog2_8.pas):

```
procedure oblicz (liczba: longint; var i: integer; var W:tablica);
begin
 i:=0;
 repeat
  W[i]:=liczba mod 2;
  liczba:=liczba div 2;
  i:=i+1
 until liczba=0
end;
```



Rysunek 2.5. Schemat blokowy algorytmu realizującego konwersję liczb z systemu dziesiętnego na dwójkowy

Omówioną metodę konwersji liczb z systemu decymalnego na binarny można zastosować również przy **zamianie systemu dziesiętnego na inne systemy liczbowe**. Należy jednak pamiętać, że każdy z tych systemów ma inną podstawę. Na przykład zamieniając liczby systemu decymalnego na system oktalny, będziemy dzielić przez osiem, na system szesnastkowy — przez szesnaście itd.

Przykład 2.6.

Zapiszmy liczbę 459_{10} w systemie szesnastkowym. Zwróć uwagę na cyfry, których wartość jest większa niż 9.

$$\begin{array}{ccccc|l} 459 & : & 16 & = & 28 & \text{reszta } 11 = B \\ 28 & : & 16 & = & 1 & \text{reszta } 12 = C \\ 1 & : & 16 & = & 0 & \text{reszta } 1 \end{array}$$

Poniżej przedstawiono skrócony zapis konwersji tych liczb:

$$\begin{array}{r|l} 459 & 11 = B \\ 28 & 12 = C \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$$

Uzyskaliśmy następujący wynik: $459_{10} = 1CB_{16}$.

Zadanie 2.13. Przekonwertuj podane liczby całkowite z systemu dziesiętnego na systemy o podstawach 2, 4, 8, 9, 16:

a) 1234_{10},
b) 999_{10},
c) 1380_{10},
d) 49_{10},
e) 2135_{10}.

Zadanie 2.14. Podaj specyfikację zadania i skonstruuj algorytm w postaci listy kroków realizujący konwersję liczb zapisanych w systemie dziesiętnym na liczby w systemie o podstawie z przedziału [2, 9].

Zadanie 2.15. Podaj specyfikację zadania i skonstruuj algorytm w postaci programu realizujący konwersję liczb zapisanych w systemie dziesiętnym na system szesnastkowy.

Konwersja innych pozycyjnych systemów liczbowych na system dziesiętny

Wskazówka

Aby **zamienić liczbę zapisaną w systemie binarnym na decymalny**, należy wyznaczyć wartość sumy cyfr tej liczby pomnożonych przez kolejne potęgi podstawy systemu, czyli 2.